Física Teórica 3
Serie 8: Modelo de Ising. Fenómenos críticos

1er Cuatrimestre de 2011

Problema 1: El modelo de *Ising* se utiliza para estudiar transiciones de fase en sistemas magnéticos. Consiste de N spines en una red que, en presencia de un campo magnético B, interactúan en la forma

$$H = -\sum_{i=1}^{N} B\mu s_i - J \sum_{<i,j>}^{N} s_i s_j \quad (s_i = \pm 1)$$

donde la última suma es sobre los primeros vecinos.

El modelo del gas de red (*Lattice Gas*) se utiliza para estudiar transiciones de fase líquido-gas. Consiste en N sitios cada uno de los cuales puede estar ocupado a lo sumo por una partícula. Las partículas interactúan entre sitios vecinos, siendo ε la energía de interacción.

Muestre que ambos modelos son isomorfos. Para ello derive las relaciones que ligan los parámetros del modelo de *Ising* con los del gas de red, de modo que la función de partición canónica del primero sea idéntica (a menos de una constante de proporcionalidad) a la función de partición gran canónica del segundo.

Problema 2: En una dimensión el modelo de *Ising* puede ser resuelto en forma exacta.

a) Considere a los N spines colocados en un círculo con condiciones periódicas de contorno (es decir $s_1 = s_{N+1}$). Muestre que la función de partición canónica Q_N es

$$Q_N(b,K) = \sum_{s_1,\ldots,s_N=\pm 1} \exp\left(\sum_{i=1}^{N}(bs_i + Ks_is_{i+1})\right) ,$$

donde $b = \beta\mu B$ y $K = \beta J$.

b) Muestre que $Q_N = \mathrm{Traza}(q^N)$ donde q es la matriz 2×2 de elementos

$$\exp\left[b(s+s')/2 + Kss'\right] \ (s, s' = \pm 1)$$

Ayuda: El sumando del argumento de la exponencial en Q_N puede ser reescrito en la forma $b(s_i + s_{i+1})/2 + Ks_is_{i+1}$.

c) Muestre que la función de partición puede escribirse en la forma

$$Q_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N ,$$

siendo

$$\lambda_\pm = e^K \left\{\cosh b \pm (\sinh^2 b + e^{-4K})^{1/2}\right\}$$

los autovalores de la matriz q.

d) Muestre que en el límite termodinámico, $\lim_{N\to\infty} \frac{\ln Q_N}{N} = \ln \lambda_+$

e) Calcule la magnetización media $M = M(T, B)$ y muestre que no hay magnetización espontánea cuando $B \to 0^+$.
Ayuda: la magnetización media de cada spin es

$$\langle s_i \rangle = \frac{1}{N} \frac{\partial \ln(Q_N)}{\partial b} |_K$$

Problema 3: En la aproximación de campo medio para un sistema de Ising, halle los exponentes críticos de las siguientes magnitudes termodinámicas:

a) La magnetización media a campo nulo, que se comporta como $M(T, B = 0) \sim (T_c - T)^\beta$ para $T \lesssim T_c$.

b) La magnetización media en la temperatura crítica, que se comporta como $M(T_c, B) \sim B^{1/\delta}$ para $B \to 0$.

c) La susceptibilidad magnética $\chi_T(T, B = 0)$, la cual diverge como $(T_c - T)^{-\gamma}$ para $T \lesssim T_c$.

Problema 4: Considere una red cuadrada bidimensional formada por dos tipos de sitios A y B con momentos magnéticos μ_A y μ_B respectivamente. El Hamiltoniano es del tipo *Ising*, pero con interacción a primeros y segundos vecinos. Las constantes de acoplamiento son:

$J_1 > 0$ entre sitios vecinos de la red A
$J_1 > 0$ entre sitios vecinos de la red B
$J_2 < 0$ entre sitios vecinos A y B

a) Escriba el hamiltoniano en términos de s_i^A y s_i^B.

b) Calcule el campo magnético efectivo (en la aproximación de campo medio) que ven los spines de la red A. Idem para la red B.

c) Halle las ecuaciones para $\langle s_i^A \rangle$ y $\langle s_i^B \rangle$.

d) Muestre que la susceptibilidad magnética a campo nulo obedece *la ley de Curie*

$$\chi(T, B \to 0) \sim \frac{1}{T - T_{\text{curie}}}$$